Sostavy lineárních rovnic
podruhé

1. Základní pojmy

- Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ typu (m,n), vektory

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \text{ a } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

  Rovnice $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ představuje krátký zápis soustavy m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- Vektor $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá řešení soustavy (1), jestliže platí rovnost $\mathbf{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$.
- $\mathbf{A}$ je matice soustavy, $\vec{b}$ je vektor pravé strany, $\vec{x}$ je vektor neznámých.
- $\overline{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}|\vec{b})$ je rozšířená matice soustavy, její typ je $(m, n+1)$.
- $hod(\overline{\mathbf{A}}) = \begin{cases} hod(\mathbf{A}) & \text{je-li } \vec{c} \text{ LK předešlých sloupců} \\ hod(\mathbf{A})+1 & \text{není-li } \vec{c} \text{ LK předešlých sloupců} \end{cases}$

Věta 1.1. *(Frobeniova) Soustava $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ je řešitelná, právě když $hod(\mathbf{A}) = hod(\overline{\mathbf{A}})$*

2. Homogenní soustava lineárních rovnic

Pokud je vektor pravé strany nulový, máme homogenní soustavu lineárních rovnic, tj.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o}.$$

- Soustava má vždy tzv. triviální řešení. To je nulový vektor $\vec{\alpha} = (0,0,\dots 0)^T$. Vždy platí $hod(\mathbf{A}) = hod(\overline{\mathbf{A}})$, přidáme-li totiž nulový sloupec pravé strany ke sloupcům matice $\mathbf{A}$, nezvětšíme tím její hodnost.
- Nechť $\vec{\alpha}$ je řešení, tj. $\mathbf{A}\vec{\alpha} = \vec{b}$ a nechť $\mathbf{A}$ je regulární (tj. existuje $\mathbf{A}^{-1}$), pak $\alpha = \mathbf{A}^{-1}\vec{o} = \vec{o}$. Tedy pro regulární matici existuje pouze triviální řešení a žádné jiné.

Věta 2.1. *Jsou-li $\vec{u}, \vec{v}$ řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o}$, pak také $t\vec{u}+s\vec{v}, t, s \in \mathbb{R}$ je řešení soustavy. Obecněji: každá lineární kombinace $t_1\vec{u}_1+t_2\vec{u}_2+\cdots+t_k\vec{u}_k, t_1, t_2, \ldots t_k \in \mathbb{R}$ řešení $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k$ je opět řešení.*

- Nalezneme pouze LN řešení soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o}$ ostatní řešení jsou jejich LK.
- Řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o}$ je lineární podprostor prostoru $V_n(R)$ dimenze $(n - k)$, kde n je počet neznámých a $k = hod(\mathbf{A})$.

3. Nehomogenní soustavy lineárních rovnic

Jsou soustavy typu

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{o}.$$

Ke každé takové soustavě existuje tzv. předružená homogenní soustava ve tvaru

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o},$$

kterou již umíme podle předchozí části řešit.

Věta 3.1.

(1) *Jsou-li $\vec{v}, \vec{w}$ řešení nehomogenní soustavy $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, pak jejich rozdíl $\vec{w} - \vec{v}$ je řešením přidružené homogenní soustavy.*

(2) *Je-li $\vec{w}$ řešení nehomogenní nehomogenní soustavy a $\vec{u}$ řešení přidružené homogenní soustavy, pak $\vec{w} + \vec{u}$ je řešení nehomogenní soustavy.*

- Je-li $\vec{w}$ jedno řešení nehomogenní soustavy, pak všechna řešení této soustavy získáme jako $\vec{w} + \vec{u}$, kde $\vec{u}$ je libovolné řešení přidružené soustavy.